

실험 기초이론

1. 실험목적

단순조화운동(simple harmonic motion)을 단진자 실험을 통해 확인하고 주기와 주파수를 측정하여 이론값과 비교, 분석한다. 또한 일정한 진동수를 갖는 외력이 가해지는 강제진동 실험을 통해 스프링-질량계의 고유진동수 근처에서 운동을 관찰하고 고유진동 상태에 있을 때 나타나는 현상을 이해한다.

2. 단순조화운동

물체에 작용하는 힘의 방향이 항상 평형점 위치로, 그리고 힘의 크기가 평형점 위치로부터 변위에 비례할 때 일어나는 물체의 주기적 운동을 말한다. 단순조화운동의 대표적인 예로 용수철 끝에 매달려 후크의 법칙에 따라 움직이는 용수철 진자와 줄의 끝에 매달려 중력장 내에서 주기 운동을 하는 단진자(simple pendulum)가 있다.

2.1 용수철 진자

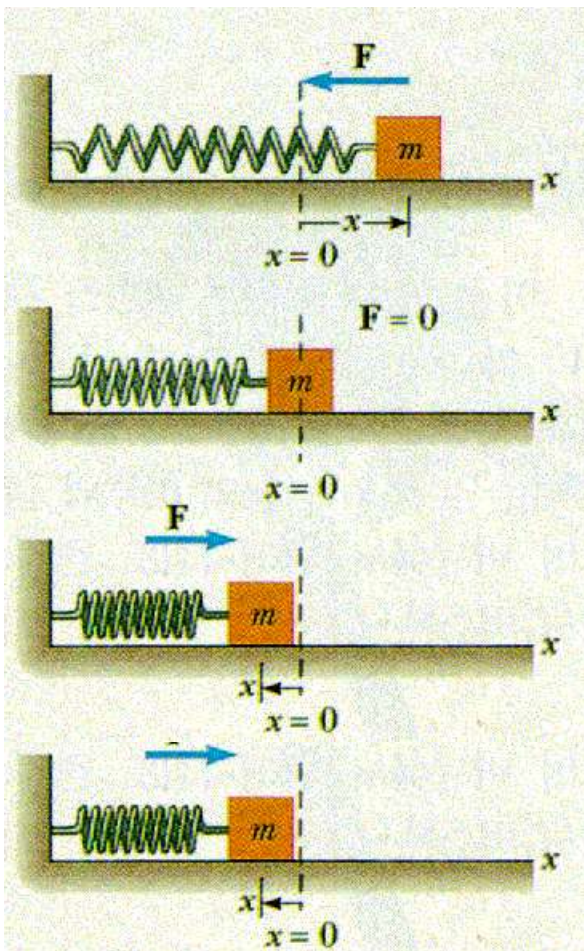


그림 1

용수철에 매달린 질량이 m 인 수평 물체의 경우(그림 1), 평형상태에서 물체를 약간 잡아당긴 후 놓을 때 물체에 작용하는 복원력은

$$F = -kx \quad (1)$$

F 는 변위 x 에 비례하고 항상 변위와 반대방향으로 작용한다(k 는 용수철 상수).

물체를 처음에 평형위치($x=0$)로부터 오른쪽으로 거리 A 만큼 잡아당긴 후 놓는다고 하자. 즉 $t=0$ 일 때, 변위 $x=A$ 가 된다. 용수철은 물체에 힘을 작용하여 물체가 평형위치로 되돌아오도록 잡아당긴다. 이 힘의 크기는 물체가 $x=0$ 를 향하여 운동함에 따라 x 가 감소하므로 감소하다가, $x=0$ 에 도달하면 영이 된다. 그러나 물체의 속력은 $x=0$ 인 지점에서 최대가 된다. 이어서 물체는 획득한 운동량에 의해 평형위치를 넘어가 용수철을 압축하기 시작한다. 물체가 음의 x 방향인 왼쪽으로 진행함에 따라, 물체에 작용하는 힘은 오른쪽으로 증가하기 시작하며, 반대로 물체의 속력은 감소하기 시작한다. 결국 물체는 $x=-A$ 에서 정지하게 된다. 이후에 위 과정이 반복되어 물체는 같은 경로에서 좌우로 진동을 계속하는 단순조화운동을 한다.

단순조화운동에서 평형위치로부터 물체의 최대변위(A)를 진폭이라고 하고, 물체가 한 사이클, 즉 물체가 변위 $x=A$ 에서 다시 A 까지를 운동하는 데 걸리는 시간을 주기 T 라고 한다. 또 단위 시간당 진동하는 횟수를 진동수(frequency) f 라고 하고, 주기의 역수와 같다($f = \frac{1}{T}$).

뉴턴의 제 2 법칙은 물체에 가해진 외부 힘과 그 물체가 갖는 가속도는 서로 비례한다는 것이다. 따라서 후크의 법칙에서

$$ma = -kx \quad (2)$$

이고, 물체의 가속도는

$$a = -\frac{k}{m}x \quad (3)$$

이다. x 의 최대값이 진폭 A 이므로 가속도는 $-kA/m$ 과 $+kA/m$ 사이의 값을 가진다.

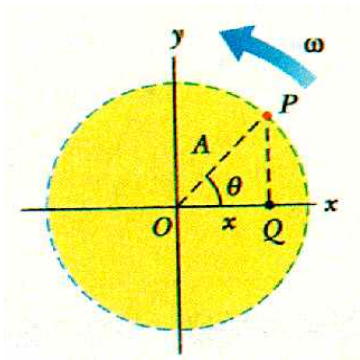


그림 2

직선상에서 일어나는 단순조화운동을 그림 2에서 물체(P)가 오른쪽 끝에서 시작해서 원주 위를 일정한 속력으로 돌고 있는 원운동과 비교해 보기로 한다. 물체 P의 x 성분, 즉 P를 x 축으로 투영시킨 그림자(Q)의 운동을 생각해 보면, $\theta = \omega t$ (ω : 각속도)이고

$$x = A \cos \theta \quad (4)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \theta \quad (5)$$

(P의 속력은 $x=0$ ($\theta=90$)일 때 최대가 되고, $x=A$ 또는 $-A$ ($\theta=0$ 또는 180)일 때 속력은 최소가 된다)

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos \theta \quad (6)$$

식 (4)와 (6)에서

$$a = -\omega^2 x \quad \text{또는} \quad F = ma = -m\omega^2 x \quad (7)$$

이 된다. 그러므로 원운동을 하는 물체의 x 축에의 투영된 그림자의 운동은 단순조화운동임을 알 수 있다.

θ 가 2π 가 될 때의 시간이 이 주기운동의 주기(T)이다. 따라서 $2\pi = \omega T$ 이고 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 이

다. 진동수는 주기의 역수이므로 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ 가 된다. 여기서, ω 가 각진동수(단위: s^{-1} 혹은 헤르츠(Hz))이다. 식 (7)과 (2)로부터

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (8)$$

따라서 용수철의 단순조화운동에 대한 주기(T)와 진동수(f)는 다음과 같다.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (9)$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (10)$$

식 (10)에서 단순조화운동에 대해서 진동수가 진폭에 무관하다는 것을 알 수 있다.

이제 용수철 진자 운동을 생각해 보자. 그림 3에서 용수철 끝에 질량 M 을 매달면 위치 O 까지 늘어나 평형상태를 이루게 된다. 이때 질량 M 을 아래로 잡아당겨 위치 O' 까지 거리 x 만큼 늘였다 하자.



그림 3

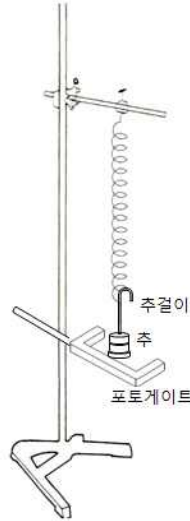


그림 4

늘어난 용수철은 늘이는데 필요한 힘과 같은 크기로 제자리로 돌아가려는 복원력을 물체에 작용하므로 물체에 작용하는 복원력은

$$F = -kx \quad (11)$$

뉴턴의 운동 제 2법칙을 적용하면

$$-kx = Ma \quad (12)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{M}x = 0 \quad (13)$$

식 (13)은 단순조화운동의 방정식이다. 일반적인 단순조화운동의 미분방정식 형태는 식 (8) ($w = \sqrt{\frac{k}{M}}$) 에 의해 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (14)$$

이 식의 일반해는

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (15)$$

여기에서 ω 는 각진동수로 주기 T 와 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (16)$$

따라서 용수철 진자의 주기 T 는 $\frac{k}{M} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ 에서 다음과 같다.

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}} \quad (17)$$

2.2 단진자

질량이 무시되는 끈에 질량이 m 인 추가 매달려 주기운동을 한다(그림 5). m 이 평형위치로 되돌아가려는 복원력 F 는

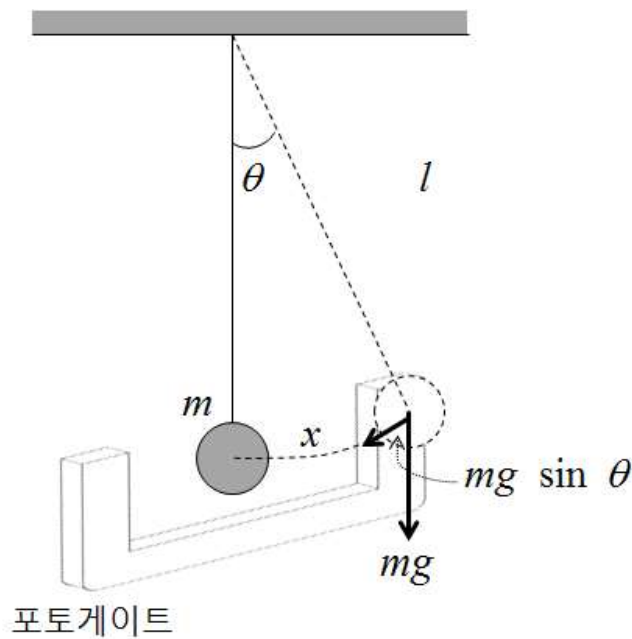


그림 5

$$F = -mg \sin \theta \quad (18)$$

진폭이 작을 때($\theta \ll 1$ (5° 이하)) $\sin \theta \approx \theta$, $x \approx l\theta$ 이므로 식 (18)은

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \frac{x}{l}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{l} x = 0 \quad (19)$$

이 된다. 이 미분방정식의 해는 용수철 진자에서와 같이 $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ 가 되고 이때의 각진동수 ω 는 $\omega^2 = \frac{g}{l}$ 이므로 단진자의 주기 T 는 다음과 같다.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (20)$$

만약 진폭이 작지 않은 경우, 즉 $\theta \ll 1$ ($\sin \theta \approx \theta$) 가 아닐 때는 식 (20)의 보정은

$$T \simeq 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left\{ 1 + \frac{1}{16} \left(\frac{A}{l} \right)^2 \right\}}$$

가 되고, 추의 반지름 r 이 l 에 비해 무시할 수 없을 때는

$$T \simeq 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left\{ 1 + \frac{1}{5} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right\}}$$

위의 두 요소를 동시에 보정하기 위한 T 는

$$T \simeq 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left\{ 1 + \frac{1}{16} \left(\frac{A}{l} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right\}}$$

3. 감쇠 진동(damped oscillations)

실제 운동의 경우에는 마찰력과 같은 비보존력이 계에 작용하므로 계의 역학적 에너지는 시간이 지남에 따라 감소한다. 이 경우에 운동은 감쇠한다고 한다. 여기에서는 마찰력을 고려하고, 마찰력이 속력에 비례하여 $f = -cv = -c \frac{dx}{dt}$ (c : 댐핑상수)로 표현되는 경우를 보자.

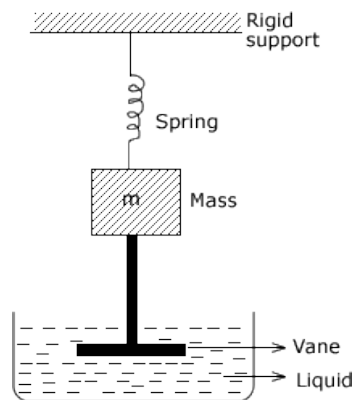


그림 6

감쇠진동 운동 방정식은 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt} \quad (c: \text{댐핑 상수}) \quad \text{즉} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (21)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{이므로}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{c}{m}\right) \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (22)$$

식 (22)의 특성방정식은

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m}\lambda = 0 \quad \text{즉} \quad \lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4mk} \quad (23)$$

$$\alpha = \frac{c}{2m}, \quad \beta = \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4mk} \quad \text{라고 정의하면}$$

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta, \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta \quad (24)$$

3.1 저감쇠(underdamping) ($c^2 < 4mk$)

$$x(t) = Ce^{-\alpha t} \cos(w^*t - \delta) \quad (\text{단, } w^* = \frac{1}{2m} \sqrt{4mk - c^2}) \quad (25)$$

$$(-1 \leq \cos(w^*t - \delta) \leq 1)$$

3.2 과감쇠(overdamping) ($c^2 > 4mk$)

$$x(t) = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t} \quad (26)$$

$$(\alpha > 0, \beta > 0, \beta^2 = \alpha^2 - \frac{k}{m} < \alpha^2, t \rightarrow \infty, x \rightarrow 0)$$

3.3 임계감쇠(critical damping) ($c^2 = 4mk$)

$$x(t) = (c_1 t + c_2) e^{-\alpha t} \quad (27)$$

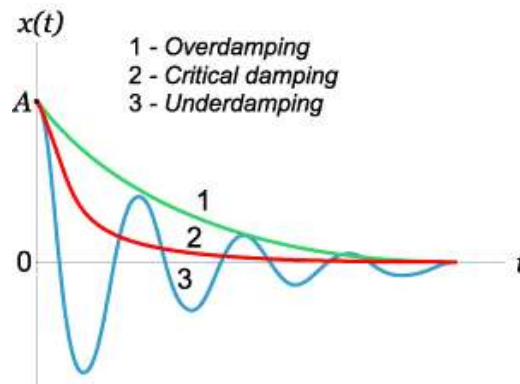


그림 7

4. 강제진동



그림 6

단순조화운동과 같이 진동하는 경우 계는 고유진동수(natural frequency)를 갖는다. 단순조화운동인 경우에도 공기에 의한 감쇠가 있으므로 서서히 진폭이 줄어들어 멈추게 된다. 그림 6와 같이 용수철에 특정한 진동수로 진동하도록 외부의 힘(가진력) $F(t)$ 를 가하는 경우를 생각해보자.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F(t) \quad (21)$$

$F(t) = F_0 \sin \omega t$ 로 하면 (ω : angular frequency, driving frequency)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t = f_0 \sin \omega t \quad (22)$$

여기서 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \frac{F_0}{m} = f_0.$

식 (22)의 일반해는

$$\begin{aligned} x(t) &= P(t) + C(t) \\ &= A \sin \omega t + [B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t] \\ &= \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t + B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (23)$$

식 (23)에서 $\omega \rightarrow \omega_0$ 일때 공진현상(resonance)이 발생한다.

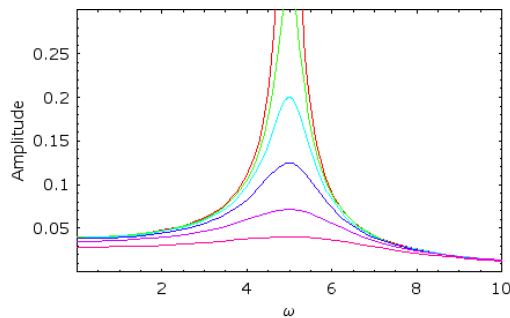


그림 8